クライン群のエルゴード性に関する諸予想とSullivanの諸定理(マルチンゲールとその周辺)

谷口, 雅彦

数理解析研究所講究録
491巻 1983年 139-157

クラインの群のエルゴード性に関する諸予想とSullivanの諸定理

京大理　谷口雅彦
(Masahiko Taniguchi)

§1. 準備と背景 — Ahlfors予想

$(n+1)$次元のhyperbolic space $\mathbb{H}^{n+1}$とは$(n+1)$次元単位球$B^{n+1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Sigma x_i^2 < 1\}$上にPoincaré計量$ds = \frac{2|dx|}{1-|x|^2}$（$|dx|$：ユークリッド線素）を入れたcomplete manifoldである。本稿では$\mathbb{H}^{n+1}$のisometryのなすdiscrete group ΓについてのSullivanによる最近の結果のいくつかを紹介する。

$n=1$、または2の場合には、かかるΓはリーマン球面$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$上の一次分数変換の群と見なせ、クライン群と呼ばれている（$n=1$の場合には特にフックス群とも呼ばれる）。クライン群はPoincaré以来、函数論における重要な研究課題であったが、近年、3-manifoldの研究との関連でThurstonらによっても注目されるようになった（cf. [9]）。なお一般に$\mathbb{H}^{n+1}$のisometryは$\hat{\mathbb{R}}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$のMöbius変換に拡張できる。かかる変換の基本的な性質については[2]を参照。

簡単のため，Γ を torsion free とすると，$M_\Gamma = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$ は complete hyperbolic manifold であるが，$\partial\mathbb{H}^{n+1}$ を $\partial B^{n+1} = S^n$ と考えることに対応して，自然な"境界"を考えることができる．すなわち，Γ を $\mathbb{H}^{n+1}$ の"境界" S^n 上にも作用していると考え Γ の limit set $L(\Gamma)$ を，一点 $x \in \mathbb{H}^{n+1}\ (= B^{n+1})$ の Γ による orbit の $\mathbb{R}^{n+1}$ 内での集積点全体とする（これは x のとり方に依らない）．このとき，$S^n - L(\Gamma)$ 上では Γ は properly discontinuous に作用し，$\partial M_\Gamma = (S^n - L(\Gamma))/\Gamma$ は M_Γ の自然な境界と考えることができる．

群 Γ の研究と $M_\Gamma \cup \partial M_\Gamma$ の研究とは，ほぼ相互に移行し合うことができるが，その際に障害となるものが $L(\Gamma)$ である．この方面の未解決の予想として，次のものがある．

<u>Ahlfors 予想</u>　有限生成クライン群 Γ に対しては，

$$m(L(\Gamma)) = 0, \quad \text{または} \quad m(S^2 - L(\Gamma)) = 0$$

（ただし，m は球面測度）

注）Γ が有限生成でなければ上の主張が成り立たないことは容易にわかる．また Γ がフックス群（$n=1$）の場合には，Ahlfors 予想が成立することは古くから知られている．本来のクライン群については近年 Thurston により重要な寄与が

あったものの、今だに未解決である。(cf. [10] 定理 8.12.3 及び系 8.12.4。なお、Sullivan も異なる形で Ahlfors 予想の解決に重要な寄与をした。これについては補足 I) を参照)

なお測度論的には、$L(\Gamma)$ よりも、一点 $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ の Γ による orbit の non-tangential な集積点全体の集合 $\Lambda_r(\Gamma)$ の方が有用であろう。かかる集合 $\Lambda_r(\Gamma)$ を conical (または radial) limit set と呼ぶ。$\Lambda_r(\Gamma)$ は $L(\Gamma)$ の Γ 不変な可測部分集合をなすが一方、$L(\Gamma) - \Lambda_r(\Gamma)$ の量は一般には無視できない。

§2. geodesic flow のエルゴード性.

M_Γ 上の geodesic flow のエルゴード性を $\Lambda_r(\Gamma)$ の量により判定できる。すなわち、

定理 1 ([5] §II, III) 以下の条件はすべて同値

(i) M_Γ 上 geodesic flow が ergodic

(ii) $m(\Lambda_r(\Gamma)) > 0$

(iii) $m(S^n - \Lambda_r(\Gamma)) = 0$

(iv) M_Γ 上 (hyperbolic な) Brown 運動が recurrent

(v) $\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp\{-n \cdot d(x, \gamma y)\} = +\infty$

($x, y \in \mathbb{H}^{n+1}$, d は hyperbolic distance)

注) $n=1$ の場合が古典的な Hopf の結果である. なお [5] では Sullivan は Garnett による手法を用いている (cf. [3] Appendix V, VI).

かかる定理の一般化として, M_Γ 上の Brown 運動が transient の場合にも, volume form 等を Γ に付随する自然な他の測度でおきかえて geodesic flow のエルゴード性を論じることができる. 以下, まず必要な概念を導入する.

1°) 考えるべき次元.

$x, y \in \mathbb{H}^{n+1}$ を固定して, 絶対 Poincaré 級数

$$g_s(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \exp\{-s\cdot d(x,\gamma y)\}$$

を考え, 収束指数 (critical exponent) を

$$\delta(\Gamma) = \inf\{s : g_s(x,y) < +\infty\}$$

で定義する. $\delta(\Gamma)$ は x, y のとり方に依らず一般に $\delta(\Gamma) \le n$ で巡回群 (の有限拡大) を除けば $\delta(\Gamma) > 0$ となる.

2°) S^n 上の球面測度にかわるもの.

今, 簡単のため $g_{\delta(\Gamma)}(x,y) = +\infty$ とする (そうでないときの修正については [4] §1 参照). このとき測度の族

$$\mu_s = \frac{1}{g_s(x,y)} \sum_{\gamma\in\Gamma} \exp\{-s\cdot d(x,\gamma y)\}\cdot\delta(\gamma y)$$

(ただし．$\delta(y)$ は y での point mass (Dirac measure)) は．$s \searrow \delta(\Gamma)$ のとき weak な集積点をもつが．その一つを μ として固定する．明らかに μ は $L(\Gamma)$ 上の確率測度で．Patterson measure とも呼ばれる．

3°) 相空間 (unit tangent vector bundle) $T_1(M_\Gamma)$ 上の測度

上述の μ から $T_1(\mathbb{H}^{n+1}) \simeq (S^n \times S^n - \{\text{diagonal}\}) \times \mathbb{R}$ 上の Γ 不変な測度

$$dm_\mu = |\xi - \eta|^{-2\delta(\Gamma)} d\mu(\xi)\, d\mu(\eta)\, dt$$

が定義できる．ただし．上の同一視は．$(x, v) \in T_1(\mathbb{H}^{n+1})$ i.e. $x \in \mathbb{H}^{n+1}$, $v \in T_x\mathbb{H}^{n+1}$ に対し．x を通る v 方向の有向 geodesic ℓ の両端点 $(\xi, \eta) \in S^n \times S^n - \{\text{diagonal}\}$ と．ℓ のユークリッドの意味での中点からの x の非ユークリッド的 (hyperbolic) な移動距離 t との対を対応させる．dm_μ は Γ 不変より M_Γ の相空間 $T_1(M_\Gamma)$ 上の測度とも見なせるが．これも dm_μ で表わす．

なお．$\mathbb{H}^{n+1}$ 上の geodesic 全体の集合は上同一視で $S^n \times S^n - \{\text{diagonal}\}$ と見なせるが．その上の測度としては (Γ 不変ではないが簡単のため) $\mu \times \mu$ を考えることにする．

4°) M_Γ 上の volume form にかわるもの

$$\Phi(x) = \int_{S^n} \left(\frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^2} \right)^{\delta(\Gamma)} d\mu(\xi) \qquad x \in \mathbb{H}^{n+1}$$

とおくと．$\Phi(x)$ は Γ 不変で $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の (hyperbolic な) Laplacian

Δ の固有値 $-\lambda = \delta(\Gamma)(\delta(\Gamma)-n)$ に対する固有函数である。dx を元の $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の (hyperbolic) volume form とするとき、

$$dx^{\mu} = \Phi^2(x)\, dx$$

とすると、dx^{μ} は Γ 不変で M_Γ 上の測度とも見なせる。これを μ に付随する M_Γ 上の volume form として用いる。

5°) μ に付随する Markov process.

$P_t(x,y)$ を $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の (heat equation $(\Delta - \frac{\partial}{\partial t})u = 0$ に対応する) Brown 運動の推移確率の density とする。volume form dx^{μ} と、新しい density

$$P_t^{\mu}(x,y) = e^{\lambda t} \frac{P_t(x,y)}{\Phi(x)\,\Phi(y)}$$

から定まる $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の Markov process を μ-process と呼ぶ。(すなわち、μ-process の推移確率は

$$P_t(x,E) = \int_E P_t^{\mu}(x,y)\, dy^{\mu} = \int_E e^{\lambda t} \frac{\Phi(y)}{\Phi(x)} P_t(x,y)\, dy$$

で与えられる) μ-process は density を

$$\bar{P}_t^{\mu}(x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} P_t^{\mu}(x, \gamma y)$$

で定めることにより M_Γ 上におとせるが、この商 process を $\bar{\mu}$-process と呼ぶことにする。

以上の準備の下に Sullivan は次の同値性を示した。$\delta(\Gamma)$ が n となる場合が定理1に対応する。

定理 2 ([4] 系.20, 定理 21, 32, 系.33)

$\delta(\Gamma) > \frac{n}{2}$ とするとき次の条件は同値である.

(i) M_Γ 上 geodesic flow が dm_μ に関し ergodic

(ii)′ $S^n \times S^n - \{\mathrm{diag.}\}$ 上 Γ の作用が $\mu\times\mu$ に関し ergodic

(ii) $\mu(\Lambda_r(\Gamma)) > 0$

(iii) $\mu(S^n - \Lambda_r(\Gamma)) = 0$

(iv) M_Γ 上 $\tilde{\mu}$-process が recurrent

(v) $g_{\delta(\Gamma)}(x, y) = +\infty$

注) 定理 2 の証明は §4 でその概略をのべるが, [6] 62p によれば, [1] (未入手) の仕事に関連して, $\delta(\Gamma)$ の値に制限なしに定理 2 の証明ができたとの announce がある.

§3. $\delta = D$ 予想と幾何学的有限なクライン群

定理 2 に関連して, $\delta(\Gamma)$ を Γ に付随する他の基本量で決定できることが望ましい. Sullivan は geodesic flow のエントロピー等の基本量との関連を調べているが, そのような基本量として以前から問題にされていたものに $L(\Gamma)$ や $\Lambda_r(\Gamma)$ の Hausdorff 次元がある. 一般に集合 E の Hausdorff 次元を

$$D(E) = \inf\{d : E \text{ の } d \text{ 次元 Hausdorff 測度 } 0\}$$

で定義するとき，次の予想がある．

<u>$\delta = D$ 予想</u>　Γを有限生成クライン群とするとき

$$\delta(\Gamma) = D(L(\Gamma))$$

<u>$\delta = D'$ 予想</u>　任意のクライン群Γに対し，

$$\delta(\Gamma) = D(\Lambda_r(\Gamma))$$

注）$n=1$，すなわちフックス群の場合には両予想とも，Sullivanにより肯定的に解決された．（[4] 系 26，27）　一方（任意のnの）任意のΓに対し，$\delta(\Gamma) \geq D(\Lambda_r(\Gamma))$であることは容易にわかる（[4] 定理24）が逆向きの不等号は一般にはわからない．Sullivanは次のような定理を示した．

<u>定理3</u>（[4] 定理25）　$T_1(M_\Gamma)$がdm_μ測度有限，すなわち，$\int_{T_1(M_\Gamma)} dm_\mu < +\infty$ならば，

$$\delta(\Gamma) = D(\Lambda_r(\Gamma))$$

$T_1(M_\Gamma)$がdm_μ測度有限ならば当然 geodesic flow はdm_μに関しergodicとなる．従って定理3の仮定を定理2の同値な条件の一つに弱められないかという問題が生じる．これに

ついては補足II)を参照せよ.

なお, $T_1(M_\Gamma)$ が dm_μ 測度有限か否かを決定することは一般に困難である. Sullivan は有限生成クライン群の内で M_Γ が幾何学的に簡単な場合に, この問題を解決した.

まず $H(L(\Gamma))$ を $L(\Gamma)$ の hyperbolic な閉凸包 (S^2 に直交する円弧による閉凸包) とし, $H(L(\Gamma))/\Gamma$ の M_Γ 内での 1-近傍を N_Γ とする. このとき, Γ が幾何学的有限とは, N_Γ の hyperbolic volume が有限であることとする.

注) 歴史的には, Γ が幾何学的有限とは, 境界面 (side) が有限個しかない基本 (Dirichlet) 多面体をもつという性質で定義された. 上の定義は Thurston による. (同値性や他の定義については [10] 8章 §8.4 を参照).

幾何学的有限なクライン群に対しては Ahlfors 予想が成り立つことを Ahlfors 自身が示した. また, $L(\Gamma)-\Lambda_r(\Gamma)$ が可算個の点からなり, 特に $D(L(\Gamma)) = D(\Lambda_r(\Gamma))$ であることも知られている (Beardon-Maskit の定理).

<u>定理4</u> ([7] §4) 幾何学的有限なクライン群 Γ に対し,

$$\int_{N_\Gamma} dx^\mu = \int_{N_\Gamma} \Phi^2(x)\,dx < +\infty$$

更に $\delta(\Gamma) > 1$ の場合には

$$\int_{M_\Gamma} dx^\mu < +\infty$$

（すなわち，$\Phi(x)$ は Laplacian の固有値 $\delta(\Gamma)(\delta(\Gamma)-2)$ に対する M_Γ 上二乗可積分な固有函数である）．

更に Sullivan は $\int_{T_1(M_\Gamma)} dm_\mu$ が $\int_{N_\Gamma} dx^\mu$ により評価できることも示した（[7] §5）．従って定理 3.4 と上の注を合わせれば次の結果を得る．

<u>定理 5</u>（[7] §5 系） 幾何学的有限なクライン群 Γ に対し

$$\delta(\Gamma) = D(L(\Gamma)) = D(\Lambda_r(\Gamma))$$

最後に，幾何学的有限なクライン群 Γ に対しては $m(S^2-L(\Gamma))$ が正（i.e. $S^2 \neq L(\Gamma)$）ならば $\delta(\Gamma) < 2$ となる．（上述のように $\int_{T_1(M_\Gamma)} dm_\mu < +\infty$ から geodesic flow の dm_μ 測度に関する ergodicity が出るが，これは定理 2 より $g_{\delta(\Gamma)}(x,y) = +\infty$ と同値であった．今，$\delta(\Gamma) = 2$ とすれば定理 1 より $m(S^2-L(\Gamma)) \leq m(S^2-\Lambda_r(\Gamma)) = 0$ となり仮定に反する）

これは一般の有限生成クライン群に対しては成り立たない．実際，Sullivan は [8] で $D(L(\Gamma)) = 2$ となる有限生成第二種クライン群 Γ（i.e. $L(\Gamma) \neq S^2$）の存在を示した．ただし，この Sullivan の例は $m(L(\Gamma)) = 0$ で Ahlfors 予想の反例にはなっていない．

§4. 定理2の証明の概略

1. (i)⟺(i)′ はほぼ自明より省略

2. (i)⟹(iii)

$\mu(S^n - \Lambda_r(\Gamma)) > 0$ ならば，$\mu\times\mu$ − a.e. geodesic $l \in (S^n - \Lambda_r(\Gamma)) \times (S^n - \Lambda_r(\Gamma)) - \{\mathrm{diag.}\}$ に対し，$\Lambda_r(\Gamma)$ の定義を使えば，一点 $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ の orbit 中，l に最も近い点の集合は有限集合 E_l をなすことがわかる．この E_l による $(S^n - \Lambda_r(\Gamma)) \times (S^n - \Lambda_r(\Gamma)) - \{\mathrm{diag.}\}$ の可算分割を $\bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$ とすると，各 L_j は一つの l の Γ による orbit と高々有限回しか交わり得ない．一方仮定より $\mu\times\mu$ 測度正の L_j が存在するから，$S^n \times S^n - \{\mathrm{diag.}\}$ 上の Γ の作用は ergodic であり得ない．

3. (iii)⟹(ii) は明らか．

注）実は更に次の定理が成り立つ．

<u>定理</u>（[4] 定理21）$\mu = \mu_a + \mu_c$ を μ の atomic part と non-atomic part との分解とするとき，$\mu_c(\Lambda_r) = 0$ または $\mu_c(S^n - \Lambda_r) = 0$ となる．

後者の場合，$S^n \times S^n - \{\mathrm{diag.}\}$ 上の Γ の作用は $\mu_c \times \mu_c$ に関し ergodic で，逆に，Γ の作用が $\mu\times\mu$ に関し ergodic ならば $\mu = \mu_c$ で $\mu(S^n - \Lambda_r) = 0$ となる．

4. (iii) ⇒ (v)　(cf. [4] 系 20)

仮定より適当に部分集合 $A \subset \Lambda_r(\Gamma)$ をとって，$\mu(A) > 0$ かつ十分大きい閉球 $B \subset \mathbb{H}^{n+1}$ に対し，$\gamma(B)$ $(\gamma \in \Gamma)$ の一点 $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ からの S^n への "radial" projection による影を $\gamma(B)'$ とするとき，$\{\gamma(B)' : \gamma \in \Gamma\}$ は A の半径が任意に小さい球による covering を含むようにできることがわかる．

一方作り方より $\mu(\gamma(B)')$ は $\exp\{-\delta(\Gamma) \cdot d(x, \gamma x)\}$ で評価できることが示せ，$g_{\delta(\Gamma)}(x, x) = +\infty$ を得る．

5. (v) ⇒ (iv)　(cf. [4] 200-201 page)

まず，
$$g(x, y) = \int_0^\infty e^{\lambda s} p_s(x, y)\, ds$$
とおくと，$g(x, y)$ は $\Delta + \lambda$ に対する Green 関数で $r = d(x, y)$ にのみ依存することは明らかである（ただし，$\lambda = \delta(\Gamma)(n - \delta(\Gamma))$ である）．更に境界での "決定方程式" $g_{rr} + n g_r + \lambda g = 0$ を解くことにより $g(x, y)$ の評価ができ，
$$g(x, y) \geq \exp\{-\delta_+ \cdot d(x, y)\}$$
$$\left(\text{ただし，} \delta_+ = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \lambda}\right)$$
となる．従って，$\delta(\Gamma) > \frac{n}{2}$ ならば $\delta(\Gamma) = \delta_+$ となり，仮定の $g_{\delta(\Gamma)}(x, y) = +\infty$ から
$$\sum_{\gamma \in \Gamma} g(x, \gamma y) = +\infty \qquad \cdots (*)$$
を得る．（$\delta(\Gamma) > \frac{n}{2}$ の仮定はここでのみ必要）

$\Phi(x)$ が Γ 不変であることを用いれば、(*) からただちに、

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \bar{p}_s^\mu(x,y)\,ds$$
$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^T \sum_{\gamma\in\Gamma} p_s^\mu(x,\gamma y)\,ds = \sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\lim_{T\to\infty}\int_0^T p_s^\mu(x,\gamma y)\,ds\right)$$
$$=\frac{1}{\Phi(x)\Phi(y)}\sum_{\gamma\in\Gamma} g(x,\gamma y) = +\infty \qquad \cdots (**)$$

を得る。

ここで μ-process の基本的性質を確認しておく（[4] 命題 28）

(i) $f(y)\equiv 1$ は P_t^μ-harmonic、すなわち operator

$$P_t^\mu \cdot f = \int_{\mathbb{H}^{n+1}} p_t^\mu(x,y) f(y)\,dy^\mu$$

で不変

(ii) $\nu = dx^\mu$ は dual operator $\nu \mapsto \nu\cdot P_t^\mu$ で不変

(iii) 対称性 : $p_t^\mu(x,y) = p_t^\mu(y,x)$

(iv) semi-group 性 : $\int_{\mathbb{H}^{n+1}} p_t^\mu(x,y)\,p_s^\mu(y,z)\,dy^\mu = p_{t+s}^\mu(x,z)$

なお、M_Γ 上の $\bar{\mu}$-process の(商−) operator を $\bar{P}_t^\mu$ で表わす。

さて、$\pi_B(x)$ を x から出る path が小球 $B\subset M_\Gamma$ を打つ確率とすると、B 上 $\pi_B(x)\equiv 1$ かつ、$M_\Gamma - B$ 上で $\bar{P}_t^\mu$-harmonic。

また十分小さい t を固定するとき、

$$\int_0^T\left(\int_{M_\Gamma}\bar{p}_s^\mu(x,y)\,(\bar{P}_t^\mu\pi_B-\pi_B)(y)\,dy^\mu\right)ds$$
$$=\left(\int_T^{T+t}-\int_0^t\right)\left(\int_{M_\Gamma}\bar{p}_s^\mu(x,y)\,\pi_B(y)\,dy^\mu\right)ds$$

よって、(iv) が成り立たないとすれば測度正の集合上 $\bar{P}_t^\mu\pi_B<\pi_B$ となり (**) から左辺の絶対値 $\to +\infty$ $(T\to+\infty)$ だが右辺は常に絶対値は $2t$ 以下だから矛盾となる。

6. (iv) ⇒ (i) (cf. [4]. 197-200 page)

まず state space $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の process 不変な測度 dx^{μ} を用いて、bi-infinite paths の空間 $L=(\mathbb{H}^{n+1})^{\mathbb{R}}$ 上に、cylinder set (A,t) $(A\subset\mathbb{H}^{n+1},\ t\in\mathbb{R})$ の測度が $\int_A dx^{\mu}$ となるような σ-有限な測度 $d\sigma$ が、Kolmogoroff 型の拡張定理を用いて構成することができる。

今、(i) が成り立たないとすると、$S^n\times S^n-\{\mathrm{diag.}\}$ の Γ 不変な部分集合 W で $\mu\times\mu(W)>0$, $\mu\times\mu(W^c)>0$ なるものがとれる。このとき、

$$h(x,x')=\frac{1}{\Phi(x)\Phi(x')}\int_{S^n\times S^n-\{\mathrm{diag.}\}}\chi_W(\xi,\xi')\left(\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^2}\right)^{\delta(\Gamma)}\left(\frac{1-|x'|^2}{|x'-\xi'|^2}\right)^{\delta(\Gamma)}d\mu(\xi)\,d\mu(\xi')$$

は各 x, x' に関し、P_t^{H}-harmonic で、仮定より Γ 不変非定数である。更に $h(x,x')$ は L 上の函数へ、Martingale の理論を用いて移しかえられる。すなわち、任意の $w\in L$ に対し、

$$f(w)=\lim_{s\to-\infty}\left\{\lim_{t\to+\infty}h(w(s),w(t))\right\}$$

を考えると、まず s を固定するとき、マルチンゲール収束定理より、a.e. $w\in L$ に対し $\lim_{t\to\infty}h(w(s),w(t))$ が存在することがわかり、次に process の対称性より、$s\to-\infty$ のときも a.e. $w\in L$ で $f(w)$ の値が確定することがわかる。従って $f(w)$ は L 上 a.e. で定義され、定義より time shift に対しても不変な Γ 不変非定数函数を与える。

以上から、$\bar{\mu}$-process が recurrent のとき、L上の、Γの元及び time shift で生成される作用が ergodic であることを示せば証明がおわる。

このため、まず"rectangle"（集合 $\bigcap_{i=1}^{n}(A_i, t_i)$: A_i は ball）の任意のpairに対し、小さい方のmassをもつものが常に他方の部分集合に shift isomorphic であればエルゴード性が従うことに注意（証明は rectangle による近似を用いればよい。なお、逆にエルゴード性から容易に任意の同じmassをもつ集合のpairが shift isomorphic であることがわかる）

そこでまず単 rectangle $\mathcal{A}=(A,t_1)$ と $\mathcal{B}=(B,t_2)$ を考えると仮定より可算個の $\mathcal{A}\cap(B,s_i)$ で a.e. に $\mathcal{A}$ を cover できる。$\mathcal{B}$ についても同様で $\bigcup_j \mathcal{B}\cap(A,t_j)\supset\mathcal{B}$ (a.e.)。そこで、$\mathcal{C}$ をそれらの和 $\{\mathcal{A}\cap(B,s_i),\ \mathcal{B}\cap(A,t_j)\}$ とすると、shift surjections $\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{C}\rightarrow\mathcal{B}$ を得。これから $\mathcal{A}$ または $\mathcal{B}$ から他方の subset への shift isomorphism が作れる。

一般の rectangles $\mathcal{A}=\bigcap_i^n(A_i,t_i)$ と $\mathcal{B}=\bigcap_j^m(B_j,t_j)$ に対しては、$\{r_k\}$ を $\bigcup_k((A_1,t_1)\cap(B_1,r_k))\supset(A_1,t_1)$ (a.e.) となるようにとり、$\mathcal{B}_k$ を $\mathcal{B}$ の (r_k-s_1)-time shift とすると、

$$\sigma\Big(\bigcup_k \mathcal{A}\cap\mathcal{B}_k\Big)\geq b\cdot\sigma(\mathcal{A})$$

ただし、$b=\sup_{x\in B_1}\{x$ から Time 0 で出る path が $\bigcap_{j=2}^{m}(B_j, s_j-s_1)$ に属する確率$\}$ (>0) とする。そこで $\mathcal{A}$ からかかる部分を除、

き，残りをrectangleで近似して上議論をくり返すことを続ければ$\mathcal{A}$を$\mathcal{B}$の部分集合のshiftの可算和でcoverできることがわかる．$\mathcal{B}$のcoveringも同様に作れ，前段と同じように，shift isomorphismが作れる．

q.e.d.

補足　I) Ahlfors予想に関するSullivanの定理

境界$S^2 = \hat{\mathbb{C}}$上へのクライン群Γの作用を考えるとき，S^2はrecurrent partとwandering part（i.e. 基本集合に分けられる部分，dissipative partともいう）に分割されるが，これに関して，次の結果が成り立つ．

定理6（[5]，定理I）　任意のクライン群Γに対し，R_ΓをS^2上のrecurrent partとするとき，R_Γ上の非自明なΓ不変可測接ベクトル場は存在しない．

一方，R_Γは幾何学的には，horospherical limit set $\Lambda_h(\Gamma) = \{\xi \in S^2 :$ 一点$x \in \mathbb{H}^3$のΓによるorbitがξで接する任意のhorosphereと交わる$\}$と一致する（[5]定理III）．従って，明らかに$\Lambda_r(\Gamma) \subset R_\Gamma = \Lambda_h(\Gamma) \subset L(\Gamma)$であるが，更に，

定理7 （[5] 定理 IV） 有限生成クライン群 Γ に対し，

$$m(L(\Gamma)-\Lambda_h(\Gamma))=0.$$

従って，$L(\Gamma)$ 上の非自明な Γ 不変可測接ベクトル場は存在しない．

この定理の一つの帰結として，有限生成クライン群 Γ の擬等角変形類全体は，リーマン面 $(S^2-L(\Gamma))/\Gamma$ の Teichmüller 空間と一致することがわかる．すなわち，変形理論においては，今の場合 $L(\Gamma)$ の存在は無視できることになり，Ahlfors 予想の一つの解決と言えよう．

なお，特に $L(\Gamma)=S^2$ となる有限生成クライン群 Γ は rigid となり，いわゆる Mostow の rigidity 定理（cf. [10]，5章7節）の拡張を与える．

補足 II） Sullivan 予想．

定理3の証明には，次の主張が示せればよい．

主張 $T_1(M_\Gamma)$ の dm_μ-a.e. の点 (x,v) に対し，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot\bar{d}(x_0,g_t((x,v)))=0$$

が成り立つ．ここで $g_t((x,v))$ は x を通る v 方向の有向 geodesic

上，x から ρ の距離が t の点．x_0 は M_p 上の固定点とし，d は M_p 上の hyperbolic distance とする．

Sullivan は $T_1(M_p)$ が dm_μ 測度有限の場合に，エルゴード定理を用いて上記主張を示した（[4] 系.19）が，同時に次の予想を述べている．

<u>Sullivan 予想.</u> M_p 上 geodesic flow が dm_μ に関して ergodic ならば，上記主張が成り立つ．

<u>付記</u>　以上は3月1日までに筆者が知り得た範囲での解説であるが，Sullivan の諸結果については，既に，Sullivan 自身によって，より包括的な解説がなされている（[6]）

なお，講演の準備中に，$\delta = D$ 予想の研究の，日本での第一人者であった赤座暢先生（金沢大理教授）の訃報を聞いた．心から御冥福を御祈り致します．

References

[1] J. Aaronson and D. Sullivan, Rational ergodicity of the geodesic flow on infinite volume hyperbolic manifolds.
(3月1日現在未入手)

[2] L. Ahlfors, Möbius transformations in several dimentions, Ordway Prof. Lectures in Math. (1981).

[3] L. Garnett, Functions and measures harmonic along the leaves of a foliation (preprint).

[4] D. Sullivan, The density at infinity of discrete group of hyperbolic motions, I.H.E.S. Pbul. Math. 50 (1979) 171-209.

[5] _____, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, Ann. Math. Stu. 97, Princeton (1981) 465-496.

[6] _____, Discrete conformal groups and measure dynamics, Bull. A.M.S. 6 (1982) 57-73.

[7] _____, Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups (preprint).

[8] _____, Growth of positive harmonic functions and Kleinian group limit sets of planar measure zero and hausdorff dimension two (preprint).

[9] B. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. A.M.S. 6 (1982) 357-381.

[10] _____, Geometry and topology of three manifolds (lecture at Princeton Univ.)